# The stability of positively expansive open maps(The Study of Dynamical Systems)

AUTHOR(S):

平出, 耕一

数理解析研究所講究録
696巻 1989年 92-97

# The stability of positively expansive open maps

筑波大数学系　平出耕一 (Koichi Hiraide)

$(X,d)$ はコンパクト距離空間とし，$f:X\to X$ は上への連続写像とする．$f$ が正拡大的 (positively expansive) であるとは，定数 $c>0$ が存在して任意の $x,y\in X$ に対し $d(f^i(x),f^i(y))\leqq c$ $(\forall i\geqq 0)$ ならば $x=y$ となるときをいう．ここで $c$ は $f$ の拡大定数と呼ばれる．正拡大性の概念は $X$ の距離の取り方に依存しない（拡大定数は変わるかもしれないが），また位相共役に関して不変である．$X$ が閉位相多様体のとき，正拡大的写像 $X\to X$ は開写像である．しかし一般には正拡大的写像が開写像になるとは限らない．次のことが知られている．

“正拡大的写像 $f:X\to X$ が開写像であるための必要十分条件は $f$ が POTP をもつことである”

このことから，正拡大的開写像はある種の安定性をもつことが予想される．このノートでは，安定性に関連する次の問題を考える．

Q. 正拡大的開写像 $f:X\to X$ が与えられたとき, $f$ に十分近い正拡大的開写像 $g:X\to X$ は $f$ と位相共役か?

以下では次の3つの場合に上の問題に対する部分解を与える.

A. $X$ は閉位相多様体

B. $X$ はコンパクト連結局所連結距離空間

C. $X$ はコンパクト連結距離空間

Case A. この場合, $\delta>0$ を十分小さくとると, 2つの連続写像 $f,g:X\to X$ に対し

$$* \qquad d(f,g)=\max\{d(f(x),g(x)):x\in X\}<\delta$$

ならば, $f$ と $g$ はホモトピックである. ホモトピックな2つの正拡大的写像は位相共役であるから, 問題Qは, $*$ の距離に関して肯定的に解ける.

Case B. この場合は, さらに $X$ が弱局所単連結である場合とそうでない場合に分かれる. $X$ が弱局所単連結の場合, 正拡大的開写像 $X\to X$ が存在すれば, $X$ は閉位相多様体でなければならない ([5]). したがって $X$ は弱局所単連結でないとしてよい. そのような $X$ 上の正拡大的開写像の例は, 複素力学系の理論の中に見い出せる ([2]):

(例) $P:\mathbb{C}\cup\{\infty\}\to\mathbb{C}\cup\{\infty\}$, $P(z)=z^2-1$ とする．Pのジュリア集合をJとおく．そのとき $P^{-1}(J)=J=P(J)$ で $P|_J:J\to J$ は正拡大的開写像である．さらにJは連結かつ局所連結であるが，弱局所単連結でない．

問題Qに対する一つの答えとして，次が成り立つ．

定理1．Xはコンパクト連結局所連結距離空間で，$f:X\to X$ は正拡大的開写像とする．そのとき任意の $\varepsilon>0$ に対し $\delta>0$ が存在して，正拡大的開写像 $g:X\to X$ が

(1) $d(f,g)<\delta$

(2) $\deg f=\deg g$

を満たすならば，同相写像 $h:X\to X$ が（一意的に）存在して $d(h,id)<\varepsilon$, $f\circ h=h\circ g$ となる．ここで $\deg f$, $\deg g$ はそれぞれ $f$, $g$ の被覆度である．

$f:X\to X$ が $\varepsilon$-locally expansive ($\varepsilon>0$) であるとは，$0<d(x,y)<\varepsilon$ ならば $d(f(x),f(y))>d(x,y)$ となるときをいう．この概念は距離dに依存することに注意する．$\varepsilon$-locally expansive な写像 $f:X\to X$ は拡大定数 $\varepsilon/2$ をもつ正拡大的写像である．定理1より次が得られる．

系．$(X, d)$ はコンパクト連結局所連結距離空間とし，$f_i : X \to X$ $(i=0,1,2,\cdots)$ は $\varepsilon$-locally expansive な開写像とする．$f_i$ が $f_0$ に一様収束するならば，任意の $\varepsilon>0$ に対して $N>0$ が存在して $i \geqq N$ に対して同相写像 $h_i : X \to X$ が（一意的に）存在して $d(h_i, id) < \varepsilon$, $f_0 \circ h = h \circ f_i$ となる．

これは Hu-Rosen([6]) の結果—不動点の安定性—，Sakai ([7])の結果—周期点の安定性—を含んでいる．

Case C. $X$ は局所連結でないとする．先ず，そのような $X$ 上の拡大的開写像の例を上げる([1]):

（例）$\mathbb{Z} \subsetneqq \tilde{\mathbb{Q}} \subsetneqq \mathbb{Q}$, $2\tilde{\mathbb{Q}} \subsetneqq \tilde{\mathbb{Q}}$ となる部分群 $\tilde{\mathbb{Q}}$ をとる．$S_1$ を $\tilde{\mathbb{Q}}$ の双対とする．そのとき $S_1$ は局所連結でないコンパクト連結距離空間（ソレノイダル群）である．さらに 1 対 1 連続写像 $\psi : \mathbb{R} \to S_1$ と図式

$$\begin{tikzcd}
\mathbb{R} \arrow[r, "x \mapsto 2x"] \arrow[d, "\psi"'] & \mathbb{R} \arrow[d, "\psi"] \\
S_1 \arrow[r, "f"'] & S_1
\end{tikzcd}$$

を可換にする $f : S_1 \to S_1$ が存在する．このとき $f$ は正拡大的開写像である．

問題Qに対して次が成り立つ.

定理2. Xはコンパクト連結距離空間とする. $f: X \to X$ は正拡大的開写像とする. そのとき, 任意の $\varepsilon > 0$ に対し $\delta > 0$ が存在して, 正拡大的写像 $g: X \to X$ が

(1) $\max\{d(f, g), \max_{x \in X} H(f^{-1}(x), g^{-1}(x))\} < \delta$

(2) $\deg f = \deg g$

を満たせば, 被覆写像 $h: X \to X$ が (一意的に) 存在して $d(h, id) < \varepsilon$, $f \circ h = h \circ g$ となる. ここで $H(\cdot, \cdot)$ はハウスドルフの距離である.

上の定理で, hは同相写像にできないことに注意する.

## References


[1] N. Aoki, Expanding maps of Solenoids, Mh. Math., 105(1988), 1-34.

[2] P. Blanchard, Complex analytic dynamics on the Riemann sphere, Bull. Amer. Math. Soc., 11(1984), 85-141.

[3] E. M. Coven and W. L. Reddy, Positively expansive maps of compact manifolds, Lecture Notes in Math., 819, Springer, 1980, 96-110.

[4] K. Hiraide, Positively expansive maps and growth of fundamental groups, Proc. Amer. Math. Soc., 104(1988), 934-941.

[5] ________, Positively expansive open maps of Peano spaces, preprint.

[6] T. Hu and H. Rosen, Locally contractive and expansive mappings, Proc. Amer. Math. Soc. 86(1982), 656-662.

[7] K. Sakai, Periodic points of positively expansive maps, Proc. Amer. Math. Soc. 94(1985), 531-534.